مجموعات النقط في الأعداد المركبة

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $|az - z_A| = |z_0|$: (a و z_0 عددان مركبان معلومان غير معدومين).

01-إذا كان $a = 1$: مجموعة النقط هي دائرة مركزها النقطة A و نصف قطرها $r = |z_0|$.

02-إذا كان $a \neq 1$: مجموعة النقط هي دائرة مركزها النقطة E لاحقتها $\frac{z_A}{a}$ و نصف قطرها $r = \frac{|z_0|}{|a|}$.

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $|z - z_A| = |kz - z_B|$: ($z_A \neq z_B$ و $k \in \mathbb{C}$)

03-إذا كان $k = 0$: مجموعة النقط هي دائرة مركزها النقطة A و نصف قطرها $r = |z_B|$.

04-إذا كان $k = 1$: مجموعة النقط هي المستقيم المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

05-إذا كان $k = -1$: مجموعة النقط هي المستقيم المحوري للقطعة المستقيمة $[AB']$. حيث : B' لاحقتها $-z_B$.

06-إذا كان $k \in \mathbb{C}$ و $|k| = 1$: مجموعة النقط هي المستقيم المحوري للقطعة المستقيمة $[AB']$. B' نقطة لاحقتها $\frac{z_B}{k}$

07-إذا كان $|k| \neq 1$: مجموعة النقط هي دائرة قطرها $[G_1G_2]$ ، حيث: G_1 مرجح الجملة $\{(A,1),(E,-k)\}$

و G_2 مرجح الجملة $\{(A,1),(E,k)\}$ ، و E نقطة لاحقتها $\frac{z_B}{k}$.

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $(z - z_A)(\overline{z - z_A}) = |z_0|$: (z_0 عدد مركب معلوم).

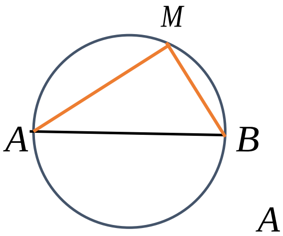
08-مجموعة النقط هي دائرة مركزها النقطة A و نصف قطرها $r = |z_0|$.

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \theta$:

09-إذا كان $\theta = 0 + 2k\pi$: مجموعة النقط هي المستقيم (AB) باستثناء القطعة المستقيمة $[AB]$.

10-إذا كان $\theta = \pi + 2k\pi$: مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B

11-إذا كان $\theta = 0 + k\pi$: مجموعة النقط هي المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B



12-إذا كان $\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$: مجموعة النقط هي نصف دائرة قطرها $[AB]$ تمسح القوس BA

في الاتجاه المباشر باستثناء النقطتين A و B

13-إذا كان $\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$: مجموعة النقط هي نصف دائرة قطرها $[AB]$ تمسح القوس AB

في الاتجاه المباشر باستثناء النقطتين A و B

14-إذا كان $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$: مجموعة النقط هي دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $L = \frac{z - z_B}{z - z_A}$

15-إذا كان L **حقيقي** : مجموعة النقط هي المستقيم (AB) باستثناء النقطة A.

16-إذا كان L **تخيلي** : مجموعة النقط هي دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة A.

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\arg(kz - z_A) = \theta + 2k\pi$: (θ زاوية معلومة و k عدد مركب غير معدوم)

17-إذا كان $k = 1$: مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[AM)$ باستثناء A لاحقتها z_A ، حيث:

$\left(\vec{i},\overrightarrow{AM}\right)=\theta+2k\pi$. و النقطة احداثياتها $\left(x_A+\cos\theta;y_A+\sin\theta\right)$ تنتمي له

18-إذا كان $k=-1$: مجموعة النقط هي نصف المستقيم $\left[A'M\right)$ باستثناء A' لاحقتها $-z_A$ ، حيث:
$\left(\vec{i},\overrightarrow{A'M}\right)=\theta-\pi+2k\pi$. و النقطة احداثياتها $\left(-x_A+\cos\theta;-y_A+\sin\theta\right)$ تنتمي له.

19-إذا كان $k\in\mathbb{C}-\{-1,1\}$: مجموعة النقط هي نصف المستقيم $\left[A'M\right)$ باستثناء A' لاحقتها $\frac{z_A}{k}$ ، حيث:
$\left(\vec{i},\overrightarrow{A'M}\right)=\theta-q+2k\pi$ و $\arg(k)=q+2k\pi$
و النقطة احداثياتها $\left(x_{A'}+\cos\theta;y_{A'}+\sin\theta\right)$ تنتمي له.

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\arg\left(kz-z_A\right)=\theta+k\pi$: (θ زاوية معلومة و k عدد مركب غير معدوم)

20-إذا كان $k=1$: مجموعة النقط هي المستقيم (AM) باستثناء النقطة A لاحقتها z_A ، حيث: $\left(\vec{i},\overrightarrow{AM}\right)=\theta$.
و النقطة احداثياتها $\left(x_A+\cos\theta;y_A+\sin\theta\right)$ تنتمي له

21-إذا كان $k=-1$: مجموعة النقط هي المستقيم (AM) باستثناء النقطة A' لاحقتها $-z_A$ ، حيث:
$\left(\vec{i},\overrightarrow{A'M}\right)=\theta-\pi+2k\pi$. و النقطة احداثياتها $\left(-x_A+\cos\theta;-y_A+\sin\theta\right)$ تنتمي له.

22-إذا كان $k\in\mathbb{C}-\{-1,1\}$: مجموعة النقط هي المستقيم (AM) باستثناء النقطة A' لاحقتها $\frac{z_A}{k}$ ، حيث:
$\left(\vec{i},\overrightarrow{A'M}\right)=\theta-q+2k\pi$ و $\arg(k)=q+2k\pi$
و النقطة احداثياتها $\left(x_{A'}+\cos\theta;y_{A'}+\sin\theta\right)$ تنتمي له.

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\arg\left(z-z_A\right)=\arg\left(\overline{z-z_A}\right)$:

23-مجموعة النقط هي المستقيم الموازي لحامل محور الفواصل و المار بالنقطة A باستثناء النقطة A ، حيث :
$\left(\vec{i},\overrightarrow{AM}\right)=0+2k\pi$

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\arg\left(z-z_A\right)=\arg\left(kz-z_B\right)$:

24-إذا كان $k=1$: مجموعة النقط هي المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B .

25-إذا كان $k=-1$: مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة $\left[AB'\right]$ باستثناء النقطتين A و B' لاحقتها $-z_B$.

26-إذا كان $k=i$: مجموعة النقط هي نصف دائرة قطرها $\left[AB'\right]$ تمسح القوس AB' في الاتجاه المباشر باستثناء النقطتين A و B' لاحقتها $-iz_B$.

27-إذا كان $k=-i$: مجموعة النقط هي نصف دائرة قطرها $\left[AB'\right]$ تمسح القوس $B'A$ في الاتجاه المباشر باستثناء النقطتين A و B' لاحقتها iz_B.

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $z=z_A+ke^{i\theta}$: (θ زاوية متغيرة و k عدد حقيقي معلوم)

28-إذا كان $k>0$: مجموعة النقط هي دائرة مركزها النقطة A و نصف قطرها k.

29-إذا كان $k<0$: مجموعة النقط هي دائرة مركزها النقطة A و نصف قطرها $|k|$.

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $z=z_A+ke^{i\theta}$: (z_A عدد مركب معلوم و θ زاوية معلومة و k يتغير على $\mathbb{R}$).

30-إذا كان k يمسح $\mathbb{R}_+^*$: مجموعة النقط هي نصف المستقيم $\left[AM\right)$ باستثناء النقطة A لاحقتها z_A. و الذي يحقق
$\left(\vec{i},\overrightarrow{AM}\right)=\theta+2k\pi$ و النقطة احداثياتها $\left(x_A+\cos\theta;y_A+\sin\theta\right)$ تنتمي له.

31- إذا كان k يمسح $\mathbb{R}^*_-$: مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[AM)$ باستثناء النقطة A لاحقتها z_A. و الذي يحقق $(\vec{i},\overrightarrow{AM})=\theta+\pi+2k\pi$ و النقطة احداثياتها $(x_A+\cos(\theta+\pi);y_A+\sin(\theta+\pi))$ تنتمي له.

32-إذا كان k يمسح $\mathbb{R}^*$: مجموعة النقط هي المستقيم (AM) باستثناء النقطة A لاحقتها z_A ، حيث : و $(\vec{i},\overrightarrow{AM})=\theta+2k\pi$ و النقطة احداثياتها $(x_A+\cos\theta;y_A+\sin\theta)$ تنتمي له.

البرهان على مجموعات النقط

خاصية: في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد و متجانس $(o,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C ثلاث نقط ، z_A لاحقة A و z_B لاحقة B. و z_C لاحقة C لدينا :

- لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي z_A-z_B ، و طويلته : $\|\overrightarrow{AB}\|=|z_A-z_B|$
- $(\vec{i},\overrightarrow{AB})=\arg(z_B-z_A)\ [2\pi]$
- $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\arg\left(\dfrac{z_B-z_C}{z_A-z_C}\right)\ [2\pi]$

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $|az-z_A|=|z_0|$: (a و z_0 عددان مركبان معلومان غير معدومين).

1- إذا كان $a=1$: مجموعة النقط هي دائرة مركزها النقطة A و نصف قطرها $r=|z_0|$.

البرهان01:

$a=1$ إذن : $|z-z_A|=|z_0|$

نعتبر $|z_0|=\alpha$ و M نقطة لاحقتها z و A لاحقتها z_A و منه : $|z-z_A|=\|\overrightarrow{AM}\|$

إذن : $\|\overrightarrow{AM}\|=\alpha$ و هي تعين معادلة دائرة مركزها A و نصف قطرها α.

2- إذا كان $a\neq 1$: مجموعة النقط هي دائرة مركزها النقطة E لاحقتها $\dfrac{z_A}{a}$ و نصف قطرها $r=\dfrac{|z_0|}{|a|}$.

البرهان 02 :

لدينا : $|az-z_A|=|z_0|$ و منه : $\left|a\left(z-\dfrac{z_A}{a}\right)\right|=|z_0|$ و و بما أن : $a\neq 0$ إذن : $|a|\times\left|\left(z-\dfrac{z_A}{a}\right)\right|=|z_0|$

و بالتالي : $\left|z-\dfrac{z_A}{a}\right|=\dfrac{|z_0|}{|a|}$ ، و هي من شكل العبارة السابقة إذن هي دائرة مركزها النقطة E لاحقتها $\dfrac{z_A}{a}$ و نصف قطرها $r=\dfrac{|z_0|}{|a|}$.

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $|z-z_A|=|kz-z_B|$: ($z_A\neq z_B$ و $k\in\mathbb{C}$)

3- إذا كان $k=0$: مجموعة النقط هي دائرة مركزها النقطة A و نصف قطرها $r=|z_B|$.

البرهان 03 :

لدينا: $k=0$ إذن : $|z-z_A|=|-z_B|$ ، نعلم أن : $|-z_B|=|z_B|$ و منه: $|z-z_A|=|z_B|$

و هذا يرجعنا إلى مجموعة النقط رقم 01 إذن : مجموعة النقط هي دائرة مركزها النقطة A و نصف قطرها $r=|z_B|$.

4- إذا كان $k=1$: مجموعة النقط هي المستقيم المحوي للقطعة المستقيمة $[AB]$.

البرهان 04 :

لدينا: $k=1$ إذن : $|z-z_A|=|z-z_B|$

نعتبر M نقطة لاحقتها z و A لاحقتها z_A و B لاحقتها z_B و منه : $|z-z_A|=\|\overrightarrow{AM}\|$

و $|z-z_B|=\|\overrightarrow{BM}\|$ و بالتالي : $\|\overrightarrow{AM}\|=\|\overrightarrow{BM}\|$ و هي تعين معادلة مستقيم محوري للقطعة $[AB]$

5- إذا كان $k=-1$: مجموعة النقط هي المستقيم المحوي للقطعة المستقيمة $[AB']$. حيث : B' لاحقتها $-z_B$.

البرهان 05 :

لدينا: $k=-1$ إذن : $|z-z_A|=|-z-z_B|$ ، نأخذ - عامل مشترك نجد: $|z-z_A|=|-(z+z_B)|$

و منه : $|z-z_A|=|-1|\times|z-(-z_B)|$ و بالتالي : $|z-z_A|=|z-(-z_B)|$

بوضع : $z_{B'}=-z_B$ نجد: $|z-z_A|=|z-z_{B'}|$ و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 04 فهي المستقيم المحوي للقطعة المستقيمة$[AB']$ و بما أن : $z_{B'}=-z_B$ فإن : B' نظيرة B بالنسبة لمبدأ المعلم.

6- إذا كان $k\in\mathbb{C}$ و $|k|=1$: مجموعة النقط هي المستقيم المحوي للقطعة المستقيمة $[AE]$. E نقطة لاحقتها $\frac{z_B}{k}$

البرهان 06 :

لدينا : $|z-z_A|=|kz-z_B|$ و بما أن: $k\neq 0$ إذن : $|z-z_A|=\left|k\left(z-\frac{z_B}{k}\right)\right|$

و منه : $|z-z_A|=|k|\times\left|z-\frac{z_B}{k}\right|$، و بما أن : $|k|=1$ إذن : $|z-z_A|=\left|z-\frac{z_B}{k}\right|$

و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 04 فهي المستقيم المحوي للقطعة المستقيمة$[AE]$ حيث : E نقطة لاحقتها $\frac{z_B}{k}$

7- إذا كان $|k|\neq 1$: مجموعة النقط هي دائرة قطرها للقطعة المستقيمة$[G_1G_2]$ ، حيث: G_1 مرجح الجملة $\{(A,1),(B',-k)\}$ و G_2 مرجح الجملة $\{(A,1),(B',k)\}$.

البرهان 07 :

لدينا : $|z-z_A|=|kz-z_B|$ و بما أن: $k\neq 0$ إذن : $|z-z_A|=\left|k\left(z-\frac{z_B}{k}\right)\right|$

و منه : $|z-z_A|=|k|\times\left|z-\frac{z_B}{k}\right|$

نعتبر M نقطة لاحقتها z و A لاحقتها z_A و E لاحقتها $\frac{z_B}{k}$ و منه : $|z-z_A|=\|\overrightarrow{AM}\|$

و $\left|z-\frac{z_B}{k}\right|=\|\overrightarrow{EM}\|$ و بالتالي : $\|\overrightarrow{AM}\|=|k|\times\|\overrightarrow{EM}\|$ بتربيع الطرفين نجد : $\|\overrightarrow{AM}\|^2=|k|^2\times\|\overrightarrow{EM}\|^2$

و منه : $\overrightarrow{AM}^2-|k|^2\times\overrightarrow{EM}^2=0$ إذن : $\left(\overrightarrow{AM}-|k|\overrightarrow{EM}\right)\bullet\left(\overrightarrow{AM}+|k|\overrightarrow{EM}\right)=0$

بما أن : $1-|k|\neq 0$ نعتبر G_1 مرجح الجملة: $\{(A,1),(E,-|k|)\}$ و منه: $\overrightarrow{AM}-|k|\overrightarrow{EM}=(1-|k|)\overrightarrow{G_1M}$

و بما أن : $1+|k|\neq 0$ نعتبر G_2 مرجح الجملة: $\{(A,1),(E,|k|)\}$ و منه: $\overrightarrow{AM}+|k|\overrightarrow{EM}=(1+|k|)\overrightarrow{G_2M}$

بالتعويض نجد: $\left(1-|k|\right)\left(1+|k|\right)\overrightarrow{G_1M}\bullet\overrightarrow{G_2M}=0$ و بما أن : $\left(1-|k|\right)\left(1+|k|\right)\neq 0$

إذن : $\overrightarrow{G_1M}\bullet\overrightarrow{G_2M}=0$ ، و هي تعين معادلة دائرة قطرها $[G_1G_2]$.

مجموعة النقط M **من المستوي حيث :** $(z-z_A)(\overline{z-z_A})=|z_0|$: (z_0 عدد مركب معلوم).

8- مجموعة النقط هي دائرة مركزها النقطة A و نصف قطرها $r=|z_0|$.

البرهان 08 :

$(z-z_A)(\overline{z-z_A})=|z_0|$ ، و بما أن : $(z-z_A)(\overline{z-z_A})=|z-z_A|^2$ إذن : $|z-z_A|^2=|z_0|$

نعتبر M نقطة لاحقتها z و A لاحقتها z_A و منه : $|z-z_A|=\|\overrightarrow{AM}\|$ و نضع : $|z_0|=\alpha$

بالتعويض : $\|\overrightarrow{AM}\|^2=\alpha$ و بما أن : α موجب إذن : $\|\overrightarrow{AM}\|^2=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2$

و منه : مجموعة النقط هي دائرة مركزها النقطة A و نصف قطرها $r=\sqrt{|z_B|}$.

مجموعة النقط M **من المستوي حيث :** $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\theta$:

9- إذا كان $\theta=0+2k\pi$: مجموعة النقط هي المستقيم (AB) باستثناء القطعة المستقيمة $[AB]$.

البرهان 09 :

$\theta=0+2k\pi$ يعني أن: $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=0$ حيث : $z\neq z_B$ و $z\neq z_A$

نعتبر M نقطة لاحقتها z و A لاحقتها z_A و B لاحقتها z_B و منه: $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=0$

و بالتالي النقط M، A و B في استقامية و النقطة M لا تنتمي للقطعة المستقيمة $[AB]$

و منه : مجموعة النقط هي المستقيم (AB) باستثناء القطعة المستقيمة $[AB]$.

10-إذا كان $\theta=\pi+2k\pi$: مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B

البرهان 10 :

$\theta=\pi+2k\pi$ يعني أن: $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\pi$ حيث : $z\neq z_B$ و $z\neq z_A$

نعتبر M نقطة لاحقتها z و A لاحقتها z_A و B لاحقتها z_B و منه: $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right)=\pi$

و بالتالي النقط M، A و B في استقامية و النقطة M تنتمي للقطعة المستقيمة $[AB]$

و منه : مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B.

11-إذا كان $\theta=0+k\pi$: مجموعة النقط هي المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B

البرهان 11 :

$\theta=0+k\pi$ يعني أن : $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=0$ أو $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\pi$ حيث : $z\neq z_B$ و $z\neq z_A$

$\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=0$ ، و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 09 هي المستقيم (AB) باستثناء القطعة المستقيمة $[AB]$.

أو $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\pi$ ،و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 10 هي القطعة المستقيمة $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B.

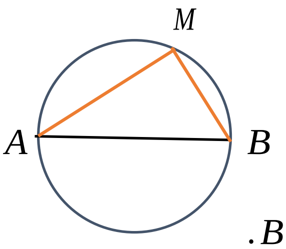
اتحاد المجموعتين هو المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B.

12-<u>إذا كان</u> $\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$: مجموعة النقط هي نصف دائرة قطرها $[AB]$ تمسح القوس BA في الاتجاه المباشر باستثناء النقطتين A و B

<u>البرهان 12 :</u>

$\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ يعني أن : $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$ حيث : $z\neq z_B$ و $z\neq z_A$

نعتبر M نقطة لاحقتها z و A لاحقتها z_A و B لاحقتها z_B ،



و منه: $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}$

و بالتالي : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=0$ ، و هي تعين نصف دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B.

و هو النصف من الدائرة تكون الزاوية $\frac{\pi}{2}$.

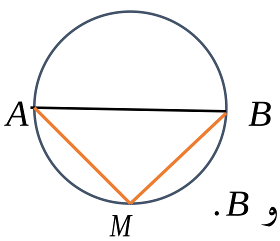
<u>ملاحظة</u> : بما أن المستوي موجه فإن في نصف الدائرة الزاوية $\frac{\pi}{2}$ و في النصف الآخر الزاوية $-\frac{\pi}{2}$

13- <u>إذا كان</u> $\theta=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$: مجموعة النقط هي نصف دائرة قطرها $[AB]$ تمسح القوس AB في الاتجاه المباشر باستثناء النقطتين A و B.

<u>البرهان 13 :</u>

$\theta=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ يعني أن : $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=-\frac{\pi}{2}$ حيث : $z\neq z_B$ و $z\neq z_A$

نعتبر M نقطة لاحقتها z و A لاحقتها z_A و B لاحقتها z_B ،



و منه: $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\frac{\pi}{2}$

و بالتالي : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=0$ ، و هي تعين نصف دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B.

و هو النصف من الدائرة تكون الزاوية $-\frac{\pi}{2}$

14- <u>إذا كان</u> $\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi$: مجموعة النقط هي دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B

<u>البرهان 14 :</u>

$\theta=\frac{\pi}{2}+k\pi$ يعني أن : $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$ أو $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=-\frac{\pi}{2}$ حيث : $z\neq z_B$ و $z\neq z_A$

$\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}$ و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 12. هي نصف دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء A و B.

و $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right)=-\frac{\pi}{2}$ و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 13 هي نصف دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء A و B.

اتحاد المجموعتين هو دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B.

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $L=\frac{z-z_B}{z-z_A}$ $\quad$ ($z_B\neq z_A$ و $z\neq z_A$)

نكتب L على الشكل الجبري:

$$L=\frac{z-z_B}{z-z_A}=\frac{x+iy-x_B-iy_B}{x+iy-x_A-iy_A}=\frac{(x-x_B)+(y-y_B)i}{(x-x_A)+(y-y_A)i}$$

$$=\frac{[(x-x_B)+(y-y_B)i][(x-x_A)-(y-y_A)i]}{[(x-x_A)+(y-y_A)i][(x-x_A)-(y-y_A)i]}$$

$$\frac{x^2+y^2-(x_A+x_B)x-(y_A+y_B)y+x_Ax_B+y_Ay_B}{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}+i\,\frac{(y_A-y_B)x+(x_B-x_A)y-x_By_A+x_Ay_B}{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}$$

15-إذا كان L حقيقي : مجموعة النقط هي المستقيم (AB) باستثناء النقطة A.

البرهان 15 :

L حقيقي يعني أن : $\operatorname{Im}(L)=0$ و منه : $\frac{(y_A-y_B)x+(x_B-x_A)y-x_By_A+x_Ay_B}{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}=0$

و بالتالي : $(y_A-y_B)x+(x_B-x_A)y-x_By_A+x_Ay_B=0$ و $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2\neq 0$

بما أن: $z_B\neq z_A$ إذن : $x_B-x_A\neq 0$ و $y_A-y_B\neq 0$ و منه المعادلة هي معادلة مستقيم

نعوض بإحداثيات النقطة A في المعادلة نجد: $(y_A-y_B)x+(x_B-x_A)y-x_By_A+x_Ay_B=0$

و منه: $y_Ax_A-y_Bx_A+x_By_A-x_Ay_A-x_By_A+x_Ay_B=0$ و منه : A تنتمي للمستقيم.

نعوض بإحداثيات النقطة B في المعادلة نجد : $(y_A-y_B)x+(x_B-x_A)y-x_By_A+x_Ay_B=0$

و منه: $y_Ax_B-y_Bx_B+x_By_B-x_Ay_B-x_By_A+x_Ay_B=0$ و منه : B تنتمي للمستقيم.

و بما أن : $(x-x_B)^2+(y-y_B)^2\neq 0$ إذن : $z\neq z_A$ و بالتالي نستثني النقطة A من المستقيم

أخيرا : مجموعة النقط هي المستقيم (AB) باستثناء النقطة A.

16-إذا كان L تخيلي صرف : مجموعة النقط هي دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B

البرهان 16 :

L تخيلي يعني أن : $\operatorname{Re}(L)=0$ و منه : $\frac{x^2+y^2-(x_A+x_B)x-(y_A+y_B)y+x_Ax_B+y_Ay_B}{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}=0$

و بالتالي: $x^2+y^2-(x_A+x_B)x-(y_A+y_B)y+x_Ax_B+y_Ay_B=0$ و $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2\neq 0$

نحسب : $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}-c}$

$$\sqrt{\frac{(x_A+x_B)^2+(y_A+y_B)^2}{4}-(x_Ax_B+y_Ay_B)}=\sqrt{\frac{(x_A+x_B)^2+(y_A+y_B)^2-4x_Ax_B-4y_Ay_B}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{(x_A{}^2+x_B{}^2+2x_Ax_B+y_A{}^2+y_B{}^2+2y_A{}^2y_B{}^2-4x_Ax_B-4y_Ay_B}{4}}$$

$$=\sqrt{\frac{x_A{}^2+x_B{}^2-2x_Ax_B+y_A{}^2+y_B{}^2-2y_A{}^2y_B{}^2}{4}}=\sqrt{\frac{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}{4}}$$

بما أن: $z_B\neq z_A$ إذن : $x_A-x_B\neq 0$ و $y_B-y_A\neq 0$ و منه : $\sqrt{\frac{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}{4}}>0$

إذن هي معادلة دائرة مركزها $\omega\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ ، نلاحظ أن ω منتصف القطعة $[AB]$

و منه قطرها $[AB]$.

و بما أن : $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2\neq 0$ إذن : $z\neq z_A$ و بالتالي نستثني النقطة A من الدائرة.

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\arg(kz-z_A)=\theta+2k\pi$: (θ زاوية معلومة و kعدد مركب غير معدوم)

17-إذا كان $k=1$: مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[AM)$ باستثناء A لاحقتها z_A ، حيث:
$(\vec{i},\overrightarrow{AM})=\theta+2k\pi$.

البرهان 17 :

إذا كان : $k=1$ إذن : $\arg(z-z_A)=\theta+2k\pi$ يعني أن : $(\vec{i},\overrightarrow{AM})=\theta+2k\pi$

الزاوية θ ثابتة ، و النقطة M لاحقتها z متغيرة إذن هي نصف مستقيم $[AM)$ باستثناء A.

ملاحظة : نستثني النقطة A لأنه لا يوجد عمدة لعدد معدوم.

18-إذا كان $k=-1$: مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[A'M)$ باستثناء A' لاحقتها $-z_A$ ، حيث:
$(\vec{i},\overrightarrow{A'M})=\theta-\pi+2k\pi$.

البرهان 18 :

إذا كان : $k=-1$ إذن : $\arg(-z-z_A)=\theta+2k\pi$ نأخذ $-$ عامل مشترك : $\arg((-1)(z+z_A))=\theta+2k\pi$

و منه : $\arg(-1)+\arg(z-(-z_A))=\theta+2k\pi$ و بما أن : $\arg(-1)=\pi$ إذن :

$\pi+\arg(z-z_{A'})=\theta+2k\pi$ و بالتالي : $\arg(z-z_{A'})=\theta-\pi+2k\pi$ حيث: A' لاحقتها $-z_A$.

و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 17 مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[A'M)$ باستثناء A' لاحقتها $-z_A$ ، حيث:
$(\vec{i},\overrightarrow{A'M})=\theta-\pi$.

19-إذا كان $k\in\mathbb{C}-\{-1,1\}$: مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[A'M)$ باستثناء A' لاحقتها $\frac{z_A}{k}$ ، حيث:
$(\vec{i},\overrightarrow{A'M})=\theta-q+2k\pi$ و $\arg(k)=q+2k\pi$

البرهان 19 :

إذا كان : $k\in\mathbb{C}-\{-1,1\}$ إذن : $\arg(kz-z_A)=\theta+2k\pi$

نأخذ k عامل مشترك : $\arg\left(k\left(z-\frac{z_A}{k}\right)\right)=\theta+2k\pi$ و منه : $\arg(k)+\arg\left(z-\frac{z_A}{k}\right)=\theta+2k\pi$

www.mathonec.com

و بالتالي : $\arg\left(z-\frac{z_A}{k}\right)=\theta-\arg(k)+2k\pi$

بوضع : $\arg(k)=q$ و $z_{A'}=\frac{z_A}{k}$ إذن : $\arg(z-z_{A'})=\theta-q+2k\pi$

نرجع إلى مجموعة النقط رقم 17.

و منه مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[A'M)$ باستثناء A' لاحقتها $\frac{z_A}{k}$ ، حيث: $(\vec{i},\overrightarrow{A'M})=\theta-q+2k\pi$ و $\arg(k)=q+2k\pi$

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\arg(kz-z_A)=\theta+k\pi$: (θ زاوية معلومة و k عدد مركب غير معدوم)

20-إذا كان $k=1$: مجموعة النقط هي المستقيم (AM) باستثناء النقطة A لاحقتها z_A ، حيث: $(\vec{i},\overrightarrow{AM})=\theta$.

البرهان 20 :

إذا كان $k=1$ و منه : $\arg(z-z_A)=\theta+k\pi$ ، إما k عدد فردي أو k عدد زوجي

من أجل k عدد فردي نجد: $\arg(z-z_A)=\theta+\pi$ نطرح 2π نجد : $\arg(z-z_A)=\theta-\pi$

و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 18 مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[AM)$ باستثناء A لاحقتها z_A ، حيث: $(\vec{i},\overrightarrow{AM})=\theta-\pi$.

من أجل k عدد زوجي نجد: $\arg(z-z_A)=\theta+2\pi$ ، و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 17 مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[AM)$ باستثناء A لاحقتها z_A ، حيث: $(\vec{i},\overrightarrow{AM})=\theta$.

مجموعة النقط هي اتحاد المجموعتين إذن : مجموعة النقط هي المستقيم (AM) باستثناء النقطة A لاحقتها z_A ، حيث: $(\vec{i},\overrightarrow{AM})=\theta$.

21-إذا كان $k=-1$: مجموعة النقط هي المستقيم (AM) باستثناء النقطة A' لاحقتها $-z_A$ ، حيث: $(\vec{i},\overrightarrow{A'M})=\theta-\pi+2k\pi$.

البرهان 21 :

إذا كان $k=-1$ و منه : $\arg(-z-z_A)=\theta+k\pi$ ، نأخذ - عامل مشترك : $\arg((-1)(z-(-z_A)))=\theta+k\pi$

نضع : $z_{A'}=-z_A$ و منه : و لدينا : $\arg(-1)=\pi$ إذن: $\arg(z-z_{A'})=\theta-\pi+k\pi$

إما k عدد فردي أو k عدد زوجي

من أجل k عدد فردي نجد: $\arg(z-z_{A'})=\theta$ ، و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 17 مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[A'M)$ باستثناء A' لاحقتها $-z_A$ ، حيث: $(\vec{i},\overrightarrow{A'M})=\theta$.

من أجل k عدد زوجي نجد: $\arg(z-z_{A'})=\theta-\pi$ ، و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 18 مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[A'M)$ باستثناء A' لاحقتها $-z_A$ ، حيث: $(\vec{i},\overrightarrow{A'M})=\theta-\pi$.

مجموعة النقط هي اتحاد المجموعتين إذن : مجموعة النقط هي المستقيم $(A'M)$ باستثناء النقطة A' لاحقتها $z_{A'}$ ، حيث: $(\vec{i},\overrightarrow{A'M})=\theta-\pi$.

22-إذا كان $k\in\mathbb{C}-\{-1,1\}$: مجموعة النقط هي المستقيم (AM) باستثناء النقطة A' لاحقتها $\frac{z_A}{k}$ ، حيث:
$\left(\vec{i},\overrightarrow{A'M}\right)=\theta-q+2k\pi$ و $\arg(k)=q+2k\pi$

البرهان 22 :

إذا كان $k\in\mathbb{C}-\{-1,1\}$ و منه : $\arg(kz-z_A)=\theta+k\pi$ ، نأخذ k عامل مشترك نجد :

$\arg\left(k\left(z-\frac{z_A}{k}\right)\right)=\theta+k\pi$ ، و منه : $\arg(k)+\arg\left(z-\frac{z_A}{k}\right)=\theta+k\pi$ ، بوضع : $\arg(k)=q$

و بوضع : $z_{A'}=\frac{z_A}{k}$ إذن: $\arg(z-z_{A'})=\theta-q+k\pi$

إما k عدد فردي أو k عدد زوجي

من أجل k عدد فردي نجد: $\arg(z-z_{A'})=\theta-q$ ، و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 19 مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[A'M)$ باستثناء A' لاحقتها $\frac{z_A}{k}$ ، حيث: $\left(\vec{i},\overrightarrow{A'M}\right)=\theta-q+2k\pi$ و $\arg(k)=q+2k\pi$

من أجل k عدد زوجي نجد: $\arg(z-z_{A'})=\theta-q-\pi$ ، و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 18 مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[A'M)$ باستثناء A' لاحقتها $\frac{z_A}{k}$ ، حيث: $\left(\vec{i},\overrightarrow{A'M}\right)=\theta-q-\pi$.

مجموعة النقط هي اتحاد المجموعتين إذن : مجموعة النقط هي المستقيم $(A'M)$ باستثناء النقطة A' لاحقتها $\frac{z_A}{k}$ ، حيث:
$\left(\vec{i},\overrightarrow{A'M}\right)=\theta-q-\pi$.

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\arg(z-z_A)=\arg\left(\overline{z-z_A}\right)$:

23-مجموعة النقط هي نصف المستقيم الموازي لحامل محور الفواصل و المار بالنقطة A باستثناء A.حيث:
$\left(\vec{i},\overrightarrow{AM}\right)=0+2k\pi$

البرهان 23 :

لدينا : $\arg\left(\overline{z-z_A}\right)=-\arg(z-z_A)+2k\pi$ ، بالتعويض نجد : $\arg(z-z_A)=-\arg(z-z_A)+2k\pi$

و منه : $2\arg(z-z_A)=2k\pi$ نقسم الطرفين على 2 نجد : $\arg(z-z_A)=k\pi$ و هذا يعني أن :

من أجل k فردي : $\left(\vec{i},\overrightarrow{AM}\right)=\pi$ هي تعين نصف المستقيم يوازي حامل محور الفواصل باستثناء النقطة A .

و من أجل k زوجي : $\left(\vec{i},\overrightarrow{AM}\right)=0$ هي تعين نصف المستقيم يوازي حامل محور الفواصل باستثناء النقطة A .

و منه مجموعة النقط هي المستقيم (AM) يوازي حامل محور الفواصل و المار بالنقطة A باستثناء النقطة A.

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\arg(z-z_A)=\arg(kz-z_B)$:

24-إذا كان $k=1$: مجموعة النقط هي المستقيم (AB) باستثناء النقطتين A و B .

البرهان 24 :

إذا كان $k=1$ فإن : $\arg(z-z_A)=\arg(z-z_B)$ و منه : $\arg(z-z_A)-\arg(z-z_B)=0+2k\pi$

من أجل $z \neq z_B$ إذن : $\arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B}\right) = 0 + 2k\pi$ و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 09 مجموعة النقط هي المستقيم (AB) باستثناء القطعة المستقيمة $[AB]$.

25-<u>إذا كان</u> $k = -1$: مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة $[AB']$ باستثناء النقطتين A و B' لاحقتها $-z_B$.

البرهان 25 :

إذا كان $k = -1$ فإن : $\arg(z - z_A) = \arg(-z - z_B)$ و منه : $\arg(z - z_A) = \arg((-1)(z + z_B))$

إذن : $\arg(z - z_A) = \arg(-1) + \arg(z - (-z_B))$

لدينا : $\arg(-1) = \pi + 2k\pi$ و بوضع: $z_{B'} = -z_B$ ، إذن : $\arg(z - z_A) - \arg(z - z_{B'}) = \pi + 2k\pi$

من أجل $z \neq z_{B'}$ نجد : $\arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_{B'}}\right) = \pi + 2k\pi$ و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 10 مجموعة النقط هي القطعة المستقيمة $[AB']$ باستثناء النقطتين A و B'.

26-<u>إذا كان</u> $k = i$: مجموعة النقط هي نصف دائرة قطرها $[AB']$ تمسح القوس AB' في الاتجاه المباشر باستثناء النقطتين A و B' لاحقتها $-iz_B$.

البرهان 26 :

إذا كان $k = i$ فإن: $\arg(z - z_A) = \arg(iz - z_B)$

نأخذ i عامل مشترك نجد : $\arg(z - z_A) = \arg((i)(z - (-iz_B)))$

لدينا : $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ و بوضع: $z_{B'} = -iz_B$ ، إذن : $\arg(z - z_A) = \arg(z - z_{B'}) + \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

و منه : $\arg(z - z_A) - \arg(z - z_{B'}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

من أجل $z \neq z_{B'}$ نجد : $\arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_{B'}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 12 هي نصف دائرة قطرها $[AB']$ باستثناء النقطتين A و B' و هو النصف من الدائرة تكون الزاوية $\dfrac{\pi}{2}$ في الاتجاه المباشر

27-<u>إذا كان</u> $k = -i$: مجموعة النقط هي نصف دائرة قطرها $[AB']$ تمسح القوس $B'A$ في الاتجاه المباشر باستثناء النقطتين A و B' لاحقتها iz_B.

البرهان 27 :

إذا كان $k = -i$ فإن: $\arg(z - z_A) = \arg(-iz - z_B)$

نأخذ $-i$ عامل مشترك نجد : $\arg(z - z_A) = \arg((-i)(z - (iz_B)))$

لدينا : $\arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ و بوضع: $z_{B'} = iz_B$ ، إذن : $\arg(z - z_A) = \arg(z - z_{B'}) - \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

و منه : $\arg(z - z_A) - \arg(z - z_{B'}) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

من أجل $z \neq z_{B'}$: نجد $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_{B'}}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 13 هي نصف دائرة قطرها $[AB']$ باستثناء النقطتين A و B' و هو النصف من الدائرة تكون الزاوية $-\frac{\pi}{2}$ في الاتجاه غير المباشر

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $z = z_A + ke^{i\theta}$ (θ زاوية متغيرة و k عدد حقيقي معلوم غير معدوم)

28-إذا كان $k > 0$: مجموعة النقط هي دائرة مركزها النقطة A و نصف قطرها k.

البرهان 28 :

لدينا : $z = z_A + ke^{i\theta}$ بالمرور إلى الطويلة : $|z - z_A| = |ke^{i\theta}|$ و منه : $|z - z_A| = |k|$

بما أن : $k > 0$ إذن : $|z - z_A| = k$

و بالرجوع إلى مجموعة النقط 01 فهي هي دائرة مركزها النقطة A و نصف قطرها k.

29-إذا كان $k < 0$: مجموعة النقط هي دائرة مركزها النقطة A و نصف قطرها $|k|$.

البرهان 29 :

لدينا : $z = z_A + ke^{i\theta}$ بالمرور إلى الطويلة : $|z - z_A| = |ke^{i\theta}|$ و منه : $|z - z_A| = |k|$

و بالرجوع إلى مجموعة النقط 01 فهي هي دائرة مركزها النقطة A و نصف قطرها $|k|$.

مجموعة النقط M من المستوي حيث : $z = z_A + ke^{i\theta}$ (z_A عدد مركب معلوم و θ زاوية معلومة و k يتغير على $\mathbb{R}$).

30-إذا كان k يمسح $\mathbb{R}_+^*$: مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[AM)$ باستثناء النقطة A لاحقتها z_A. و الذي يحقق $(\vec{i}, \overrightarrow{AM}) = \theta + 2k\pi$

البرهان 30 :

إذا كان k يمسح $\mathbb{R}_+^*$ إذن $k > 0$ و منه: $z = z_A + ke^{i\theta}$ و بالتالي : $z - z_A = ke^{i\theta}$ و هذا يعني أن : $\arg(z - z_A) = \theta + 2k\pi$ و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 17 إذن : مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[AM)$ باستثناء النقطة A لاحقتها z_A. و الذي يحقق $(\vec{i}, \overrightarrow{AM}) = \theta + 2k\pi$

31-إذا كان k يمسح $\mathbb{R}_-^*$: مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[AM)$ باستثناء النقطة A لاحقتها z_A. و الذي يحقق $(\vec{i}, \overrightarrow{AM}) = \theta + \pi + 2k\pi$

البرهان 31 :

إذا كان k يمسح $\mathbb{R}_-^*$ إذن $k < 0$ و منه : $z = z_A + ke^{i\theta}$ و يمكن أخذ – عامل مشترك و بالتالي : $z - z_A = -|k|e^{i\theta}$ و لدينا : $-1 = e^{i\pi}$ ، بالتعويض : $z - z_A = |k|e^{i(\theta+\pi)}$ و هذا يعني أن : $\arg(z - z_A) = \theta + \pi + 2k\pi$ و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 18 إذن : مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[AM)$ باستثناء النقطة A لاحقتها z_A. و الذي يحقق $(\vec{i}, \overrightarrow{AM}) = \theta + 2k\pi$

32-إذا كان k يمسح $\mathbb{R}^*$: مجموعة النقط هي المستقيم (AM) باستثناء النقطة A لاحقتها z_A ، حيث : $(\vec{i}, \overrightarrow{AM}) = \theta + 2k\pi$

البرهان 32 :

إذا كان k يمسح $\mathbb{R}^*$ إذن إما : $k > 0$ أو $k < 0$

من أجل : $k > 0$

و منه: $z = z_A + ke^{i\theta}$ و بالتالي : $z - z_A = ke^{i\theta}$ و هذا يعني أن : $\arg(z - z_A) = \theta + 2k\pi$

و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 17 إذن : مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[AM)$ باستثناء النقطة A لاحقتها z_A. و الذي يحقق $(\vec{i}, \overrightarrow{AM}) = \theta + 2k\pi$

من أجل : $k < 0$

و منه : $z = z_A + ke^{i\theta}$ و يمكن أخذ – عامل مشترك و بالتالي : $z - z_A = -|k|e^{i\theta}$ و لدينا : $-1 = e^{i\pi}$ ،

بالتعويض : $z - z_A = |k|e^{i(\theta+\pi)}$ و هذا يعني أن : $\arg(z - z_A) = \theta + \pi + 2k\pi$

و بالرجوع إلى مجموعة النقط رقم 18 إذن : مجموعة النقط هي نصف المستقيم $[AM)$ باستثناء النقطة A لاحقتها z_A. و الذي يحقق $(\vec{i}, \overrightarrow{AM}) = \theta + 2k\pi$ ،

و مجموعة النقط هي اتحاد مجموعتي النقط السابقتين و بالتالي : مجموعة النقط هي المستقيم (AM) باستثناء النقطة A لاحقتها z_A ، حيث : $(\vec{i}, \overrightarrow{AM}) = \theta + 2k\pi$.

www.mathonec.com